

Лабораторна робота №2

«Дослідження полів заряджених об'єктів»

Мета роботи: вивчення методики розрахунку електростатичних полів заряджених об'єктів (плоського конденсатора, зарядженої сфери, двох концентричних сфер, двох коаксіальних циліндрів, двох паралельних тонких дротів, прямокутного заземленого жолоба, круглого заземленого циліндра). Дослідження характеристик отриманих полів (потенціалу, напруженості) залежно від властивостей об'єктів, що розглядаються.

У звіті надати таке:

- короткий теоретичний опис принципів розрахунку полів у досліджуваних об'єктах з докладним описом вхідних величин;
- Проведені розрахунки та графіки.

Перед виконанням роботи студент має освоїти теоретичний матеріал лекцій та відповідної літератури.

Лабораторні роботи виконуються на комп'ютерах серед моделювання MathCad.

Звіт повинен мати форму послідовних логічних викладок та міркувань студента, які завершуються змістовними висновками щодо кожного проведеного дослідження.

Оформлення звіту здійснюється на лабораторному занятті, після завершення якого викладач робить висновок про виконання роботи студентом.

Захист лабораторної роботи здійснюється лише за наявності правильно оформленого звіту. Захист передбачає правильні відповіді студента на поставлені викладачем питання.

За кожною лабораторною роботою студент отримує оцінку, яка значною мірою впливає на підсумкову екзаменаційну оцінку.

1. Поле плоского конденсатора

Потрібно розрахувати поле між двома нескінченними паралельними пластинами А і В, що знаходяться в однорідному середовищі, мають відповідно потенціали:

$$U_A = 0 \quad U_B = 0 \quad (1.1)$$

Відстань між пластинами дорівнює d . Виберемо розташування координатних осей оскільки це показано рисунку.

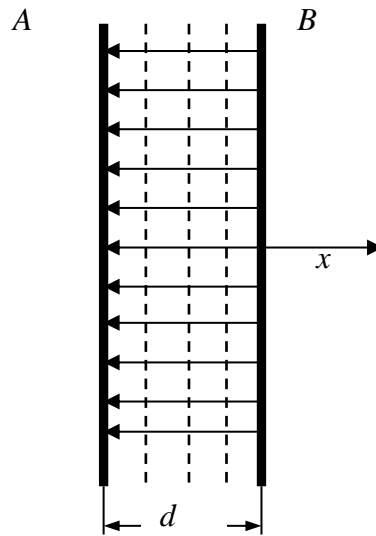


Рисунок 1.1

У розглянутій задачі поле залежить тільки від x , тому зберігаючи в рівнянні Лапласа

$$\operatorname{div} \operatorname{grad} U = 0 \quad (1.2)$$

тільки перший доданок, отримаємо

$$\frac{d^2 U}{dx^2} = 0 \quad (1.3)$$

Рішення цього рівняння матиме вигляд

$$U_A = C_1 x + C_2 \quad (1.4)$$

Довільні постійні визначаються з граничних умов:

$$\begin{aligned} U &= 0 \quad \text{при} \quad x = 0, \\ U &= U_0 \quad \text{при} \quad x = d. \end{aligned}$$

Відповідно до цього маємо

$$C_1 d = U_0$$

Звідки

$$C_1 = \frac{U_0}{d} \quad (1.5)$$

Таким чином

$$U = C_1 x + C_2 = \frac{U_0}{d} x \quad (1.6)$$

Потенціал змінюється лінійно зі зміною x . Це рішення задовольняє умови Лапласа та граничних умов. Тому воно і є єдиним. Напруженість поля визначається як градієнт потенціалу:

$$\vec{E} = -\text{grad}U = -i_x \frac{dU}{dx} \quad (1.7)$$

$$E = -\frac{U_0}{d} \quad (1.8)$$

Напруженість поля постійна у всіх точках поля і спрямована у бік, протилежний осі x (при $U_0 > 0$).

Враховуючи, що біля поверхні провідника

$$E_n = \frac{\sigma}{\varepsilon} \quad (1.9)$$

Маємо для пластини А та для пластини В

$$\frac{U_0}{d} = -\frac{\sigma_A}{\varepsilon} ; \quad \sigma_A = -\frac{U_0 \varepsilon}{d} ; \quad -\frac{U_0}{d} = -\frac{\sigma_B}{\varepsilon} ; \quad \sigma_B = -\frac{U_0 \varepsilon}{d} .$$

Заряд на пластинах розподілено рівномірно.

Загальний заряд на майданчику величиною S дорівнює

$$q = \sigma S = \frac{U_0 S \varepsilon}{d} \quad (1.10)$$

Відповідно до виразу $C = \left| \frac{q_A}{U_A - U_B} \right|$ для ємності плоского конденсатора з площею S (не враховуючи спотворювального впливу країв) отримаємо

$$C = \frac{q}{U_0} = \frac{S \varepsilon}{d} \quad (1.11)$$

2. Поле зарядженої сфери

Розглянемо поле, створене зарядженою провідною сферою радіуса a . Потенціал сфери вважатимемо рівним U_0 . Для цього завдання природно використовувати рівняння Лапласа у сферичній системі координат.

Зважаючи на симетрію завдання потенціал функції є функцією тільки радіуса r .

Зберігаючи у виразі

$$\operatorname{div} \operatorname{grad} U = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial U}{\partial r} + \frac{1}{r^2 \sin \Theta} \frac{\partial}{\partial \Theta} \left(\sin \Theta \frac{\partial U}{\partial \Theta} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \Theta} \frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2} \right) \right) \quad (2.1)$$

тільки член, що містить похідні r , отримаємо :

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial U}{\partial r} \right) = 0 \quad (2.2)$$

Звідки

$$r^2 \frac{\partial U}{\partial r} = C_1 ; \quad \frac{\partial U}{\partial r} = \frac{C_1}{r^2} ; \quad U = -\frac{C_1}{r} + C_2.$$

Як граничні умови, що визначають постійні i , приймемо ,що

При $r \rightarrow \infty$ функція $U = 0$

При $r = a$, тобто на даній сфері , $U = 0$.

Звідси отримуємо

$$C_2 = 0 \quad -C_1 = U_0 a \quad (2.3)$$

Підставляючи значення постійних у знайдений вираз, маємо

$$U = U_0 \frac{a}{r} \quad (2.4)$$

Відповідно напруженість поля

$$\vec{E} = \operatorname{grad} U = -\vec{i}_r \frac{dU}{dr} \quad (2.5)$$

$$E = \frac{U_0}{r^2} a \quad (2.6)$$

Цей результат, звісно має збігатися з результатом розрахунку, отриманим з допомогою рівності Гаусса-Остроградського. Справді, на підставі співвідношення (1.9) отримаємо

$$\sigma = E\varepsilon|_{r=a} = \frac{U_0}{a} \varepsilon \quad (2.7)$$

Отже, весь заряд, що знаходиться на поверхні сфери, дорівнює

$$q = 4\pi a^2 \sigma = 4\pi a^2 \frac{U_0}{a} \varepsilon = 4\pi \varepsilon U_0 a \quad (2.8)$$

$$E = \frac{q}{4\pi r^2} = \frac{U_0}{r^2} a \quad (2.9)$$

Для ємності сфери звідси маємо

$$C = \frac{q}{U_0} = 4\pi \varepsilon a \quad (2.10)$$

3. Поле двох концентричних сфер

Нехай дві концентричні сфери, що мають радіуси a та b (рис. 3.1), заряджені відповідно до потенціалів U_a та $U_b=0$.

Простір між сферами заповнено однорідним середовищем з діелектричною проникністю ε . Для всіх точок цього середовища справедливе рівняння Лапласа, справедливе його рішення, знайдене в попередньому прикладі:

$$U = \frac{C_1}{r} + C_2 \quad (3.1)$$

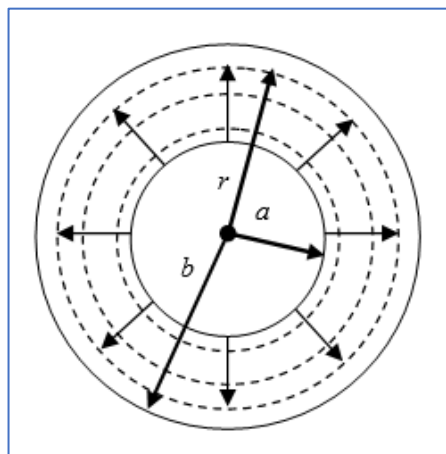


Рис. 3.1 до розрахунку поля двох концентричних сфер

Відмінність від попереднього полягає лише у значеннях довільних постійних, які треба обирати відповідно до граничних умов завдання.

Так як при $r = a$ потенціал $U = U_a$ і при $r = b$ $U = U_b = 0$, то $\frac{C_1}{a} + C_2 = U_a$ і $\frac{C_1}{b} + C_2 = 0$, звідки

$$C_1 = \frac{ab}{b-a} + U_a \quad (3.2)$$

$$C_2 = -a \frac{U_a}{b-a} \quad (3.3)$$

Підставляючи знайдені значення постійних, отримаємо

$$U = \frac{U_a}{r} \cdot \frac{ab}{b-a} - \frac{aU_a}{b-a} \quad (3.4)$$

Напруженість поля

$$\vec{E} = -\vec{i}_r \frac{dU}{dr}; \quad (3.5)$$

$$E = \frac{\varepsilon U_a}{r^2} \cdot \frac{ab}{b-a}. \quad (3.6)$$

Поверхневі щільності зарядів на внутрішній та зовнішній сферах рівні:

$$\sigma_a = \varepsilon E|_{r=a} = \frac{\varepsilon U_a}{a} \cdot \frac{b}{b-a} \quad (3.7)$$

$$\sigma_b = -\varepsilon E|_{r=b} = \frac{\varepsilon U_a}{b} \cdot \frac{a}{b-a} \quad (3.8)$$

Повні заряди q_a і q_b на внутрішній та зовнішній сферах рівні за величиною

$$|q_a| = |q_b| = |\sigma_a| 4\pi a^2 = |\sigma_b| 4\pi b^2 = 4\pi \varepsilon U_a \left| \frac{ab}{b-a} \right|. \quad (3.9)$$

Звідси для ємності сферичного конденсатора знаходимо

$$C = \frac{q_a}{U_a} = 4\pi \varepsilon \frac{ab}{b-a}. \quad (3.10)$$

4. Поле двох коаксіальних циліндрів

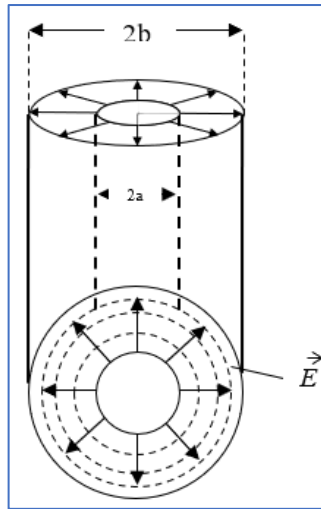


Рис. 4.1. До розрахунку поля двох коаксіальних циліндрів.

Нехай є два нескінченно довгі коаксіальні циліндри з радіусами a і b (див. рис. 4.1), заряджених відповідно до потенціалів U_a і $U_b=0$. У цьому вся задачі зручно користуватися рівнянням Лапласа в циліндричній системі координат. Циліндри знаходяться в однорідному діелектричному середовищі. Потенціал у разі не залежить від координати φ та від координати z . Таким чином, рівняння Лапласа (див. лекції) переписється у такому вигляді:

$$\frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \left(\rho \frac{dU}{d\rho} \right) = 0 \quad (4.1)$$

Звідки $\rho \frac{dU}{d\rho} = C_1$, $U = C_1 \ln \rho + C_2$.

У цьому випадку залишається лише заново визначити довільні постійні відповідно до нових граничних умов, а саме: $C_1 \ln a + C_2 = U_a$, $C_1 \ln b + C_2 = 0$, звідки

$$C_1 = \frac{U_a}{\ln \frac{a}{b}} \quad (4.2)$$

$$C_2 = -C_1 \ln b = -\frac{U_a \ln b}{\ln \frac{a}{b}} \quad (4.3)$$

Напруженість поля

$$\vec{E} = -\text{grad}U = -\vec{i}_\rho \frac{C_1}{\rho} = -\vec{i}_\rho \frac{U_a}{\ln \frac{a}{b}} \cdot \frac{1}{\rho} = \vec{i}_\rho \frac{U_a}{\ln \frac{b}{a}} \cdot \frac{1}{\rho} \quad (4.4)$$

Вектор E спрямований по радіусу, якщо $U_a > 0$. Значення поверхневих щільностей електрики у точках $\rho=a$, $\rho=b$ рівні:

$$\sigma_a = \varepsilon \frac{U_a}{\ln \frac{b}{a}} \cdot \frac{1}{a}, \quad (4.5)$$

$$\sigma_b = -\varepsilon \frac{U_a}{\ln \frac{b}{a}} \cdot \frac{1}{b}. \quad (4.6)$$

Заряди, що припадають на одиницю довжини циліндра:

$$\tau_a = \sigma_a 2\pi a = 2\pi\varepsilon \frac{U_a}{\ln \frac{b}{a}} \quad (4.7)$$

$$\tau_b = \sigma_b 2\pi b = 2\pi\varepsilon \frac{U_b}{\ln \frac{b}{a}} \quad (4.8)$$

Відповідно для повної ємності двох коаксіальних циліндрів отримаємо:

$$C = \frac{\tau_a}{U_a} = \frac{2\pi\varepsilon}{\ln \frac{b}{a}} \quad (4.9)$$

5. Поле двох паралельних тонких дротів

У даному прикладі ми обмежимося розглядом нескінченно тонких (лінійних) проводів, що мають кінцеві щільності речовини, а саме τ і $-\tau$.

У цьому випадку потенціал у будь-якій точці простору знайдеться накладенням потенціалів від першого та другого дротів з урахуванням їх знаків. Відповідно до рис.5.1. та виразу для потенціалу одиночного дроту маємо

$$U = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon} \ln r_1 - \frac{\tau}{2\pi\varepsilon} \ln r_2 = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon} \ln \frac{r_1}{r_2} \quad (5.1)$$

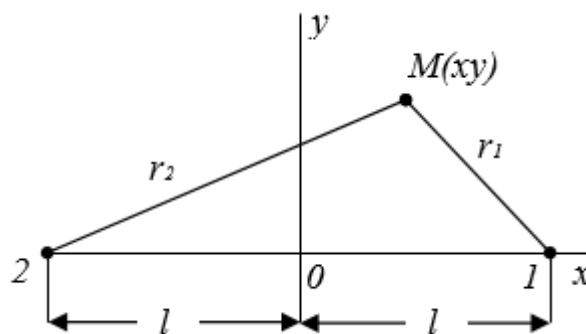


Рисунок 5.1. До розрахунку поля двох паралельних нескінченно тонких проводів

З отриманого співвідношення випливає, що всі точки, що лежать на кривій $\frac{r_1}{r_2} = \text{const}$, мають той самий потенціал. Однак відомо, що

геометричним місцем точок з постійним відношенням відстаней до двох фіксованих точок є коло. Таким чином, екіпотенційні криві в площині креслення суть кола. Силкові лінії поля повинні бути перпендикулярні до екіпотенційних ліній і, отже, також являють собою сімейство кіл.

Знайдемо рівняння екіпотенційного кола, що відповідає деякому постійному значенню:

$$\frac{r_1}{r_2} = k \quad (5.2)$$

Позначаючи відстань між проводами через $2l$ і вибираючи систему координат, як показано на рис.5.1, отримаємо

$$\frac{r_1}{r_2} = \frac{\sqrt{(x-l)^2+y^2}}{\sqrt{(x+l)^2+y^2}} = k \quad (5.3)$$

Звівши в квадрат обидві частини рівності (5.3) і здійснивши елементарні перетворення, матимемо

$$x^2 + y^2 - 2l \frac{1+k^2}{1-k^2} x = -l^2 \quad (5.4)$$

Додаючи до лівої та правої частин $\left(\frac{l(1+k^2)}{1-k^2} \right)^2$, отримаємо

$$\left(x - \frac{1+k^2}{1-k^2} l \right)^2 + y^2 = \left(\frac{2kl}{1-k^2} \right)^2 \quad (5.5)$$

Це і є рівняння кола з центром у точці $x_0 = \frac{1+k^2}{1-k^2} l$ і $y_0 = 0$

та радіусом $r_0 = \frac{2k}{1-k^2} l$.

Усі точки знайденого кола мають значення потенціалу, що дорівнює

$$U = \frac{\tau}{2\pi\epsilon} \ln \frac{r_1}{r_2} = \frac{\tau}{2\pi\epsilon} \ln k \quad (5.6)$$

6. Поле прямокутного нескінченного жолоба

У попередніх прикладах завдання зводилося до вирішення рівняння Лапласа для потенціалу, що залежить лише від однієї змінної. Тепер

розглянемо приклади та методи вирішення, коли потенціал залежить від кількох змінних, тобто. у загальному вигляді.

Рівняння Лапласа у прямокутних координатах (x, y, z) має вигляд

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = 0 \quad (6.1)$$

Шукаємо частне рішення цього рівняння $U_p(x, y, z)$ у вигляді добутку трьох функцій $U_p(x, y, z) = X(x)Y(y)Z(z)$. Підставляючи $U_p(x, y, z) = X(x)Y(y)Z(z)$ у вихідне рівняння, отримаємо $\frac{d^2 X}{dx^2} YZ + \frac{d^2 Y}{dy^2} XZ + \frac{d^2 Z}{dz^2} XY = 0$, або, розділивши цю рівність на XYZ ,

$$\frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} + \frac{1}{Y} \frac{d^2 Y}{dy^2} + \frac{1}{Z} \frac{d^2 Z}{dz^2} = 0 \quad (6.2)$$

Ліва частина рівняння останнього рівняння може перетворюватися на нуль у тому й лише тому випадку, якщо кожне з доданків окремо є величина постійна.

Справді, рівність (6.2) має вигляд

$$F_1(x) + F_2(y) + F_3(z) = 0 \quad (6.3)$$

Звідки, диференціюючи, наприклад, x , отримаємо

$$F_1'(x) = 0 \quad \text{або} \quad F_1(x) = \text{const.}$$

Таким чином, рівняння (6.2) розпадається на три звичайні диференціальні рівняння виду:

$$\frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} = -k_x^2 \quad (6.4)$$

$$\frac{1}{Y} \frac{d^2 Y}{dy^2} = -k_y^2 \quad (6.5)$$

$$\frac{1}{Z} \frac{d^2 Z}{dz^2} = -k_z^2 \quad (6.6)$$

Де $-k_x^2, -k_y^2, -k_z^2$ – постійні величини, пов'язані між собою очевидною рівністю:

$$k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = 0 \quad (6.7)$$

Рівняння (6.4), (6.5), (6.6) можуть бути переписані таким чином:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2 X}{dx^2} + k_x^2 X &= 0, \\ \frac{d^2 Y}{dy^2} + k_y^2 Y &= 0, \\ \frac{d^2 Z}{dz^2} + k_z^2 Z &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (6.8)$$

Всі вони є добре відомими звичайними диференціальними рівняннями другого порядку, розв'язання яких може бути записане у вигляді:

$$\left. \begin{aligned} X &= A_1 \cos k_x x + A_2 \sin k_x x, \\ Y &= B_1 \cos k_y y + B_2 \sin k_y y, \\ Z &= C_1 \cos k_z z + C_2 \sin k_z z. \end{aligned} \right\} \quad (6.9)$$

Зауважимо, що в силу рівності (6.7), якщо k_x^2 , k_y^2 або k_z^2 - дійсні числа, то хоча б одне з них має бути негативним. Припустимо, наприклад, що $k_x^2 > 0$ і $k_y^2 > 0$ тоді $k_z^2 < 0$ і отже, k_z - уявне число.

У цьому випадку рішення для Z зручно уявити не як тригонометричну функцію уявного аргументу k_z , а як гіперболічну функцію відповідного речового аргументу. Ввівши $k_z = \sqrt{-k_x^2 - k_y^2} = i\sqrt{k_x^2 + k_y^2} = ik$, отримаємо

$$Z = C_1 \cos(ikz) + C_2 \sin(ikz) = C_1 \operatorname{ch} kz + C_2' \operatorname{sh} kz \quad (6.10)$$

де $C_2' = iC_2$.

Таким чином, частні рішення будуть представлятися у вигляді добутку тригонометричних та гіперболічних синусів та косінусів.

При складанні частного рішення ми можемо вибрати постійні інтегрування та два з параметрів k_x, k_y, k_z так, щоб задовольнити хоча б частково граничним умовам завдання.

Розглянемо приклад. Нехай потрібно знайти поле нескінченно протяжного вздовж осі z заземленого жолоба (рис.6.1), кришка якого ізолювана від корпусу та має потенціал $U = U_0$.

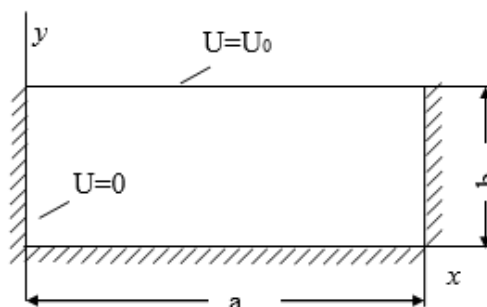


Рисунок 6.1 – Прямокутний нескінченний жолоб

Відповідно до завдання потенціал не залежить від z тому у вирішенні системи:

$$\left. \begin{aligned} X &= A_1 \cos k_x x + A_2 \sin k_x x, \\ Y &= B_1 \cos k_y y + B_2 \sin k_y y, \\ Z &= C_1 \cos k_z z + C_2 \sin k_z z. \end{aligned} \right\} \quad (6.11)$$

Функція Z має бути постійною. Для цього, очевидно, необхідно, щоб $k_z = 0$. Тоді частне рішення для $U_p(x, y)$ набуде вигляду:

$$U_p(x, y) = [A_1 \cos k_x x + A_2 \sin k_x x] \cdot [B_1 \cos k_y y + B_2 \sin k_y y] \quad (6.12)$$

де згідно (6.7) маємо:

$$k_x^2 + k_y^2 = 0 \quad (6.13)$$

Граничні умови для функції U наступні:

$$\begin{aligned} 1) \quad & x = 0, \quad U = 0, \\ 2) \quad & x = a, \quad U = 0, \\ 3) \quad & y = 0, \quad U = 0, \\ 4) \quad & y = b, \quad U = U_0. \end{aligned} \quad (6.14)$$

Щоб задовольнити першу та третю з цих умов, достатньо покласти $A_1 = B_1 = 0$, після чого частне рішення набуде вигляду

$$U_p(x, y) = A_p \sin k_x x \sin k_y y \quad (6.15)$$

Нам залишилося задовольнити другий і четвертий граничні умови (6.14). Очевидно, друга умова буде задоволена, якщо $\sin k_x a = 0$, звідки $k_x a = p\pi$, де p - довільне ціле число.

Таким чином, ми можемо надавати k_x різні, але не будь-які значення, а саме, k_x має бути кратно $\frac{\pi}{a}$:

$$k_x = p \frac{\pi}{a} \quad (6.16)$$

В силу (6.7) вибір k_x однозначно визначає k_y :

$$k_y = \sqrt{-k_x^2} = ip \frac{\pi}{a} \quad (6.17)$$

В результаті частне рішення набуває вигляду:

$$U_p(x, y) = A_p \sin p \frac{\pi x}{a} \operatorname{sh} p \frac{\pi y}{a} \quad (6.18)$$

У рішенні (6.18), яке задовольняє першому, другому та третьому граничним умовам (6.14), можливий довільний вибір цілого числа p . Проте легко бачити, що хоч би яке ціле число не вибирати, нам не вдасться задовольнити четверту граничну умову.

Дійсно, ця умова вимагає, щоб при $y = b$ для всіх x , що лежать в інтервалі від 0 до a , за винятком $x = 0$ і $x = a$, потенціал залишався постійним, рівним U_0 , тоді як рішення рівняння (6.18), $y = b$ дає:

$$U_p|_{y=b} = A_p \sin p \frac{\pi}{a} b \sin p \frac{\pi}{a} x = \text{const} \sin p \frac{\pi}{a} x \quad (6.19)$$

На рис.2 показано необхідний закон зміни потенціалу (безперервна лінія прямокутної форми) і той розподіл потенціалу, який надається частним рішенням при різних значеннях p (Пунктирні криві). Однак із рис.2 видно, що можна взяти суму частних рішень з різними p і A_p так, щоб ця сума на інтервалі $0 < x < a$ при $y = b$ давала необхідний закон сталості потенціалу. Для цього достатньо задану функцію $U|_{y=b} = U_0$ розкласти до ряду Фур'є і, прирівнявши окремі складові її правої частини виразу (6.19), визначити значення відповідних «амплітуд» A_p та «частот» p .

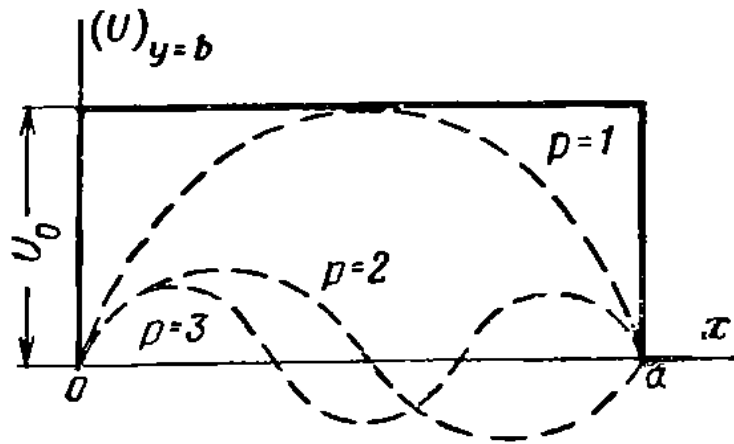


Рисунок 6.2 – До розрахунку поля прямокутного жолоба

Прямокутного виду крива (рис.6.2) при розкладанні до ряду Фур'є дає:

$$U|_{y=b} = \frac{4U_0}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k-1} \sin \left[\frac{(2k-1)\pi x}{a} \right] \quad (6.20)$$

Звідси випливає, що для виконання граничних умов на кришці жолоба в рівності (6.20) необхідно взяти лише непарні значення p :

$$p = 2k - 1 \quad (6.21)$$

а амплітуди A_p вибрати таким чином, щоб виконувалась рівність

$$A_p \operatorname{sh} p \frac{\pi}{a} b = 4 \frac{U_0}{\pi p} \quad (6.22)$$

або

$$A_p = \frac{4U_0}{\pi p \operatorname{sh} p \frac{\pi}{a} b} \quad (6.23)$$

Підставляючи знайдене значення A_p у частне рішення (6.18) та взявши суму за всіма непарними p , отримаємо як рішення нашого завдання функцію

$$U = \frac{4U_0}{\pi} \sum_p \frac{1}{p \operatorname{sh} p \frac{\pi}{a} b} \sin p \frac{\pi x}{a} \operatorname{sh} p \frac{\pi y}{a} \quad (6.24)$$

де враховано (6.21), і підсумовування ведеться за всіма цілими значеннями k . У ряді випадків для наближеного розрахунку може виявитися достатнім обчислити лише два-три члени цієї суми.

7. Поле круглого заземленого циліндра.

Як було розглянуто, прямокутного виду крива при розкладанні в ряд Фур'є дає:

$$U|_{y=b} = \frac{4U_0}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k-1} \sin \left[\frac{(2k-1)\pi x}{a} \right] \quad (7.1)$$

Звідси випливає, що для виконання граничних умов на кришці ринви в рівності необхідно взяти лише непарні значення p :

$$p = 2k - 1 \quad (7.2)$$

а амплітуди вибрати таким чином, щоб виконувалась рівність

$$A_p \operatorname{sh} p \frac{\pi}{a} b = 4 \frac{U_0}{\pi p} \quad (7.3)$$

Або

$$A_p = \frac{4U_0}{\pi p \operatorname{sh} p \frac{\pi}{a} b} \quad (7.4)$$

Підставляючи знайдене значення A_p у частне рішення та взявши суму за всіма непарними p , отримаємо як рішення нашого завдання функцію

$$U = \frac{4U_0}{\pi} \sum \frac{1}{\text{psh}(p\frac{\pi}{a})b} \sin p \frac{\pi x}{a} \text{sh} p \frac{\pi y}{a} \quad (7.5)$$

де $p = 2k - 1$, і підсумовування ведеться за всіма цілими значеннями k . У ряді випадків для наближеного розрахунку може виявитися достатнім обчислити лише два-три члени цієї суми.

Вирішення рівняння Лапласа в циліндричній системі координат.

У циліндричній системі координат (ρ, ϕ, z) рівняння Лапласа записується у такому вигляді:

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial U}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 U}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = 0 \quad (7.6)$$

Шукаємо частне рішення цього рівняння $U_p(\rho, \phi, z)$ у вигляді добутку трьох функцій

$$U_p(\rho, \phi, z) = R(\rho)\Phi(\phi)Z(z) \quad (7.7)$$

Підставляючи (7.6) у вихідне рівняння, отримаємо

$$\Phi Z \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \left(\rho \frac{dR}{d\rho} \right) + \frac{RZ}{\rho^2} \frac{d^2 \Phi}{d\phi^2} + R\Phi \frac{d^2 Z}{dz^2} = 0 \quad (7.8)$$

або, розділивши на $R\Phi Z$

$$\frac{1}{\rho R} \frac{d}{d\rho} \left(\rho \frac{dR}{d\rho} \right) + \frac{1}{\rho^2 \Phi} \frac{d^2 \Phi}{d\phi^2} + \frac{1}{Z} \frac{d^2 Z}{dz^2} = 0 \quad (7.9)$$

Ця рівність може задовольнятися лише тоді, коли величина $\frac{1}{\Phi} \frac{d^2 \Phi}{d\phi^2}$ не залежить від ϕ , а $\frac{1}{Z} \frac{d^2 Z}{dz^2}$ залежить від z . Справді, якщо, наприклад, останній доданок (7.9) залежить від z , то ліва частина рівності не може звертатися в нуль для всіх значень z , бо інші складові при різних z залишаються постійними.

Аналогічні міркування переконують нас, що другий доданок (7.9) не залежить від φ . Таким чином, ми можемо написати, що

$$\begin{cases} \frac{1}{Z} \frac{d^2 Z}{dz^2} = +k^2 \\ \frac{1}{\Phi} \frac{d^2 \Phi}{d\varphi^2} = -m^2 \end{cases} \quad (7.10)$$

де k та m – довільні постійні числа.

Підставляючи (7.10) рівняння (7.9), отримаємо диференціальне рівняння для функції R :

$$\frac{1}{\rho R} \frac{d}{d\rho} + \left(\rho \frac{dR}{d\rho} \right) - \frac{m^2}{\rho^2} + k^2 = 0 \quad (7.11)$$

Рівняння (7.10) для Z та Φ суть звичайні диференціальні рівняння другого порядку. Перепишемо їх у вигляді:

$$\begin{cases} \frac{d^2 Z}{dz^2} - k^2 Z = 0 \\ \frac{d^2 \Phi}{d\varphi^2} + m^2 \Phi = 0 \end{cases} \quad (7.12)$$

Розв'язання цих рівнянь можна так:

$$Z = B_1 \operatorname{ch}(kz) + B_2 \operatorname{sh}(kz) \quad (7.13)$$

$$\Phi = A_1 \cos m\varphi + A_2 \sin m\varphi \quad (7.14)$$

Розглянемо тепер рівняння (7.11) для функції R .

Помножуючи всі члени рівняння R і виконуючи диференціювання, отримаємо:

$$\frac{d^2 R}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{dR}{d\rho} + \left(k^2 - \frac{m^2}{\rho^2} \right) R = 0 \quad (7.15)$$

Рівняння (7.15) є диференціальним рівнянням зі змінними коефіцієнтами. Вирішення цього рівняння не виражається через відомі елементарні функції, а призводить до спеціальних функцій – функцій Бесселя m -го порядку. Сенса останньої назви у тому, що з різних значень m рішенням рівняння будуть різні функції, тобто. Різні значення m визначають різні диференціальні рівняння і, отже, різні за характером рішення. Щодо

величини k , то, як легко бачити, ця величина при заданому значенні m не змінює характеру рівняння.

Розділивши всі члени рівняння (7.15) на k^2 і ввівши нову незалежну змінну $x = k\rho$, ми наведемо (7.15) до вигляду:

$$\frac{d^2 R}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{dR}{dx} + \left(1 - \frac{m^2}{x^2}\right) R = 0 \quad (7.16)$$

Це рівняння називається рівнянням Бесселя.

Постійна m , що входить до рівняння (7.16) і визначає закон зміни поля вздовж радіусу, входить також у рішення (7.14), яке встановлює залежність потенціалу поля від кута ϕ .

З виразу (7.14) випливає, що m не може бути лише цілим числом.

Справді, якщо припустити, що m є число дробове, то

$$\begin{aligned} \cos m(\phi + 2\pi) &\neq \cos m\phi \\ \sin m(\phi + 2\pi) &\neq \sin m\phi \end{aligned}$$

У такому разі потенціал точки був би багатозначною функцією кута.

Зауважимо, нарешті, що у випадку, коли полі має осьовий симетрією, тобто. не залежить від кута, слід покласти

$$m = 0$$

і залежність потенціалу від радіусу визначатиметься безселевою функцією нульового порядку.

Розв'язання диференціального рівняння Бесселя.

Для будь-якого фіксованого m Рівняння Бесселя є диференціальним рівнянням другого порядку.

Як будь-яке лінійне диференціальне рівняння, що містить як найвищу похідну другу похідну, це рівняння має два незалежні частні рішення.

Перше частне рішення рівняння Бесселя називають функцією Бесселя m -го порядку або циліндричною функцією першого роду.

Друге окреме рішення називають циліндричною функцією m -го порядку другого роду або функцією Неймана. Її позначають. Загальне рішення рівняння Бесселя має вигляд:

$$R = C_1 J_m(x) + C_2 N_m(x) \quad (7.17)$$

де C_1 і C_2 - довільні постійні, зумовлені з граничних умов.

Функції Бесселя та Неймана мають численні застосування у техніці і зокрема радіотехніки. Ці функції табульовані і їм є відповідні графіки.

Наведемо вираз для безселевої функції цілого порядку m у вигляді статежного ряду:

$$J_m(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+m}}{k!(k+m)!} \quad (7.18)$$

де факторіал нуля прийнято рівним одиниці.

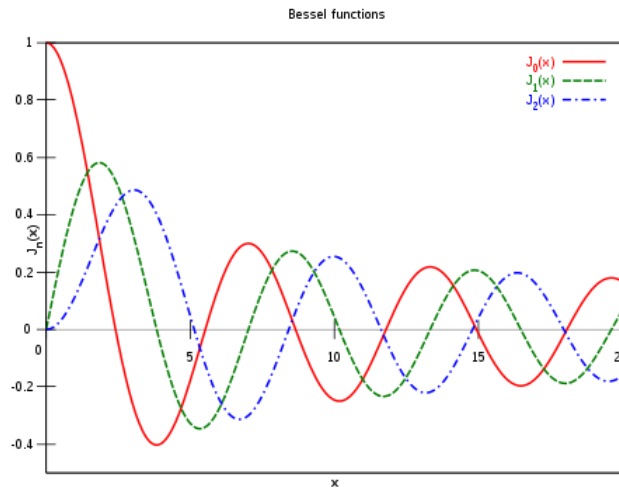


рис 7.1. Функції Бесселя першого роду.

Функції Неймана будь-якого нецілого порядку можуть бути представлені через функції Бесселя так:

$$N_m(x) = \frac{J_m \cos m\pi - J_{-m}(x)}{\sin m\pi} \quad (7.19)$$

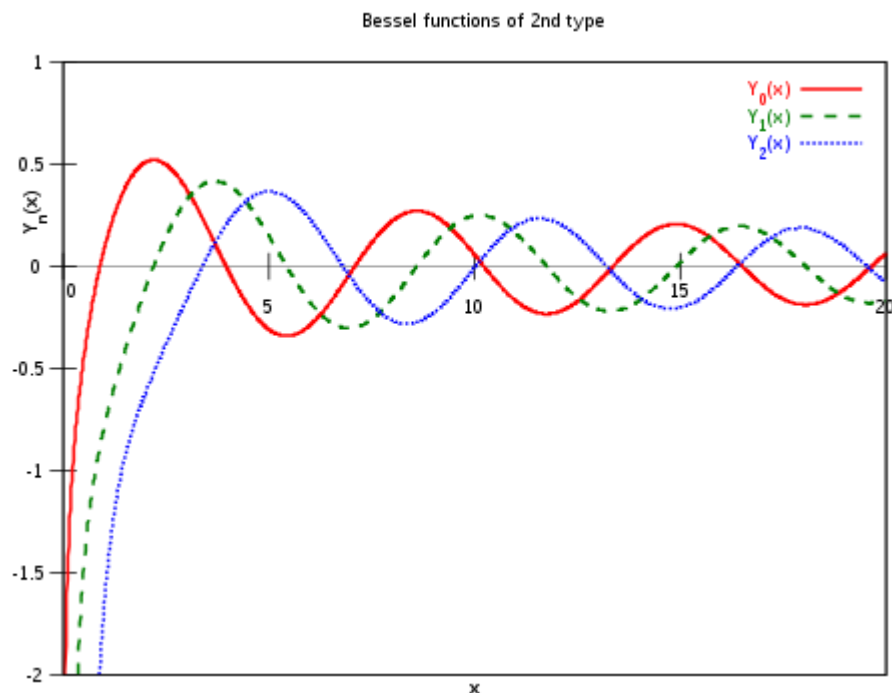


рис 7.2. Функції Бесселя другого роду.

Приклад розв'язування рівняння Лапласа в циліндричній системі координат.

Як приклад, що ілюструє застосування результатів, отриманих попередніх параграфах, розглянемо таке завдання.

Потрібно знайти розподіл потенціалу в круглому заземленому циліндрі, якщо верхня кришка циліндра ізолювана і має потенціал $U = U_0$.

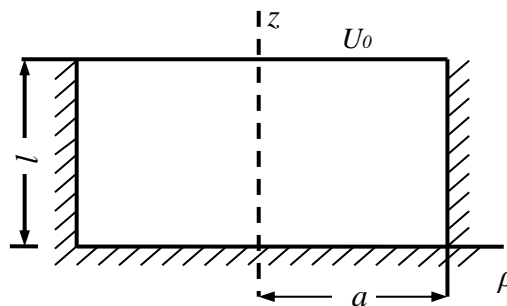


рис 7.3. Круглий заземлений циліндр

Вирішуючи рівняння Лапласа в циліндричній системі координат, ми приходимо до наступних окремих рішень для функцій Z , Φ і R :

$$\begin{aligned} Z &= B_1 \operatorname{ch}(kz) + B_2 \operatorname{sh}(kz) \\ \Phi &= A_1 \cos(m\varphi) + A_2 \sin(m\varphi) \\ R &= C_1 J_m(x) + C_2 N_m(x) \end{aligned}$$

де $x = k\rho$.

Внаслідок симетрії завдання потенціал не залежить від кута φ та індекс m слід покласти рівним нулю. Тоді для частного рішення $U_p(\rho, \varphi, z) = R\Phi Z$ отримаємо

$$U_p(\rho, z) = [B_1 \operatorname{ch}(kz) + B_2 \operatorname{sh}(kz)] \cdot [C_1 J_0(k\rho) + C_2 N_0(k\rho)] \quad (7.20)$$

Так як потенціал повинен мати кінцеве значення у всіх точках області та в тому числі на осі ($\rho = 0$), а функція Неймана залишається кінцевою при нульовому значенні аргументу, то вважаємо .

Крім того, відповідно до позначень, наведених на малюнку, ми маємо такі граничні умови:

$$\begin{cases} U = 0 \text{ при } z = 0 \\ U = 0 \text{ при } \rho = a \\ U = U_0 \text{ при } z = l \end{cases} \quad (7.21)$$

Задовольняючи першу граничну умову, прирівняємо B_1 нулю. Тепер рішення (7.20) має вигляд

$$U_p(\rho, z) = C_p \operatorname{sh}(kz) \cdot J_0(k\rho) \quad (7.22)$$

Для того, щоб задовольнити другу умову, необхідно, щоб $J_0(ka)$ перетворювалась в нуль. Звідси випливає, що має дорівнювати одному з коренів бесселевої функції нульового порядку, позначаючи

$$ka = \chi_{0p} \quad (7.23)$$

де χ_{0p} є p -й корінь функції $J_0(x)$, отримаємо

$$U_p(\rho, z) = C_p \operatorname{sh}\left(\frac{\chi_{0p}}{a} z\right) \cdot J_0\left(\frac{\chi_{0p}}{a} \rho\right) \quad (7.24)$$

Частне рішення, однак, як легко бачити, не задовольняє третю граничну умову

Особливості виконання лабораторної роботи

У роботі необхідно вивчити методику розрахунку електростатичних полів різних об'єктів (починаючи від більш простих – конденсатор, сфера, і закінчуючи складнішими – заземленого жолоба та круглого заземленого циліндра). Програму лабораторної роботи розбито на блоки відповідно до розрахунків кожного об'єкта. Щоб відкрити блок розрахунку, необхідно натиснути на нього лівою клавішею мишки, після завершення досліджень блок можна закрити таким же чином.

Числові значення полів, помічених зеленим кольором, рекомендується змінювати для дослідження електростатичного поля об'єктів.

Хід роботи

1. Дослідження поля плоского конденсатора.

- ознайомитись з методикою розрахунку поля в конденсаторі;
- Отримати графіки залежності потенціалу від відстані між пластинами;
- Отримати картину електричного поля в конденсаторі та його модуля для різних значень відстані між пластинами.

2. Вивчення поля зарядженої сфери.

- ознайомитись з методикою розрахунку поля;
- Отримати графіки залежності потенціалу від відстані від центру сфери;

- одержати картину поля та його модуля залежно від відстані від центру сфери.

3. Вивчення поля двох концентричних сфер (сферичний конденсатор).

- ознайомитись з методикою розрахунку поля;
- Побудувати графіки залежності потенціалу від відстані між сферами;
- отримати картину поля та його модуля залежно від відстані між сферами;

4. Дослідження поля двох коаксіальних циліндрів.

- ознайомитись з методикою розрахунку поля;
- Побудувати графіки залежності потенціалу від відстані між циліндрами;
- отримати картину поля та його модуля залежно від відстані між

циліндрами;

5. Дослідження поля двох паралельних тонких дротів.

- ознайомитись з методикою розрахунку поля;
- Побудувати графіки залежності потенціалу від відстані між проводами;
- дослідити лінії напруженості поля та його модуля;

6. Дослідження поля прямокутного заземленого ринви.

- уважно ознайомитись з методикою розрахунку поля заземленого жолоба;
- Дослідити залежність потенціалу поля від потенціалу верхньої кришки

жолоба та його розмірів. Як впливає кількість частних рішень на якість розв'язання задачі?

- Отримати картину ліній напруженості електричного поля.

7. Дослідження поля круглого заземленого циліндра.

- уважно ознайомитись з методикою розрахунку поля круглого заземленого циліндра;

- Дослідити залежність потенціалу поля від потенціалу верхньої кришки циліндра та його розмірів. Як впливає кількість частних рішень на якість розв'язання задачі?

- Отримати картину ліній напруженості електричного поля.

8. Зробити висновки про виконану роботу.

9. Підготувати відповіді питання.

А) Яке основне рівняння застосовувалося у лабораторній роботі для розрахунку полів об'єктів?

Б) У чому особливість розрахунку електростатичних полів у декартових, циліндричних та сферичних координатах?

У) У яких системах координат розраховувалися електричні поля заданих об'єктів?

Г) Розкажіть про функції Бесселя та Неймана. Аби вирішити яких завдань лабораторної роботи застосовувалися ці функції.

Д) Як залежить потенціал поля від ширини пластини конденсатора та відстані між пластинами?

Е) Що таке граничні умови і як вони використовуються у цій роботі?